

Ein neuer Ansatz zur Modellierung kurzer Leiterstücke in Hochfrequenzschaltungen

((Aufmacher, soll Interesse wecken))

Stand 07.06.17

Wer schon einmal eine Hochfrequenzschaltung entwickelt und vor dem Aufbau simuliert hat, steht meist ziemlich hilflos vor der Frage, mit welchem Wert man die kleinen Induktivitäten der Zuleitungen zu den Bauelementen im Ersatzschaltbild möglichst genau berücksichtigen kann. Denn das kann schon bei 70 cm recht kritisch sein. Oder wissen Sie, lieber Leser, welche Induktivität ein Zuleitungsdraht von 4,5 mm Durchmesser und 9 mm Länge hat? Entscheiden Sie sich spontan für: a) 9 nH, b) 6 nH, c) 3 nH oder d) weiß nicht. Falls Sie d) gewählt haben oder noch schnell bei [1] nachsehen wollen, sollten Sie lieber gleich weiter lesen.

- [1] Lösung der Eingangsfrage: Es kommt auf die näheren Umstände an, aber a) ist schon mal definitiv falsch.
- [2] Edward B. Rosa: The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors, Bulletin of the Bureau of Standards, Vol. 4, No. 2, 1908, pp. 301-344. Gefunden bei <http://www.g3ynh.info/zdocs/refs/NBS/Rosa1908.pdf>
- [3] Tim Healy, Santa Clara University: Inductance of a Straight Wire. <http://www.ee.scu.edu/eefac/healy/indwire.html>
- [4] David Knight: Components and Materials: Part 2. http://www.g3ynh.info/zdocs/comps/part_2.html
- [5] Marc T. Thompson: Impedance Calculation Techniques – Part II: Approximations and Handbook Methods. <http://www.thompsonrd.com/induct2.pdf>
- [6] Prüfungsfragen “Technische Kenntnisse” Klasse A, Bundesnetzagentur, 2007, S. 135. <http://www.bundesnetzagentur.de/SharedDocs/Downloads/DE/BnetzA/Sachgebiete/Telekommunikation/Regulierung/Frequenzordnung/Amateurfunk/Fragenkatalog/TechnikFragenkatalogKlasseAf252rld9014pdf.pdf>
- [7] H. H. Meinke, F. W. Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik - Band 1: Grundlagen. 1. Aufl. 1956, 2. Aufl. 1962, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg
- [8] hp/Agilent/Avago: AppCAD – Your Personal Assistant for RF, Microwave and Wireless Applications. <http://hp.woodshot.com/>
- [9] Mantaro, Inc.: Impedance Calculators. http://www.mantaro.com/resources/impedance_calculator.htm
u. a. Zweidrahtleitung (exakte Formel), Stripline und Asymmetric Stripline.
- [10] Darstellung des area cosinus hyperbolicus durch Logarithmus naturalis. https://de.m.wikipedia.org/wiki/Areasinus_Hyperbolicus_und_Areakosinus_hyperbolicus/
- [11] Reference Data for Radio Engineers, Second Edition 1946, S. 197, ITT Corp. New York http://www.tubebooks.org/Books/FTR_ref_data.pdf
- [12] Reference Data for Radio Engineers, Fourth Edition 1956, S. 590, ITT Corp. New York http://www.tubebooks.org/Books/itt_ref_4.pdf

- [13] K. Blattenberger, KB3UON: Transmission Line Equations. <http://www.rfcafe.com/references/electrical/transmission-lines.htm>
u.a. Formel aus [12], Draht gegen eine Ebene (Näherung), Draht zw. 2 Ebenen gleich weit weg (Näherung) und Näherung für Zweidrahtleitung.
- [14] Kevin Schmidt W9CF: Notes on the characteristic impedance of a coax with a square outer conductor. <http://fermi.la.asu.edu/w9cf/articles/square/>
- [15] RFsim99 <http://www.elektronikbasteln.pl7.de/rfsim99-filter-berechnung.html>
oder <http://www.electroschematics.com/835/rfsim99-download/>
- [16] Potenzreihe der Wurzelfunktion. <http://www.matheboard.de/archive/306579/thread.html>
- [17] Harm, H., Transmission Line Calculator - Wellenwiderstand, Induktivitäts- und Kapazitätsbelag ungewöhnlicher Strukturen. <http://dh2mic.darc.de/tlc/tlc.htm>
- [18] Kenneth L. Nist, KQ6QV, Arbitrary Transmission Line Calculator atlc2 <http://www.hdtvprimer.com/KQ6QV/atlc2.html>

((Stand der Technik))

Am häufigsten stößt man in der Literatur auf die Antwort a) 10 nH pro cm Drahtlänge. Dabei wird nicht zwischen kurzen oder langen Drähten unterschieden und der Durchmesser des Drahtes spielt scheinbar auch keine Rolle. Dabei ist das Problem seit über hundert Jahren bekannt und untersucht. 1908 hat Edward B. Rosa [2] unter starken Vereinfachungen eine erste Formel abgeleitet, die Tim Healy [3] näher untersucht und dabei zwei Varianten gefunden hat:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} * l * \left[\ln\left(\frac{4l}{d}\right) - 1 \right] \quad (1) \quad \text{und} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} * l * \left[\ln\left(\frac{4l}{d}\right) - 0.75 \right] \quad (2)$$

Formel (2) gilt für niedrige Frequenzen, bei denen die innere Induktivität noch vorhanden ist. Für höhere Frequenzen, also bereits ab dem Lang- und Mittelwellenbereich wo der Skineffekt voll zuschlägt, gilt Formel (1).

Aber leider sind beide Ausdrücke für die praktische Anwendung ungeeignet, wie David W. Knight, G3YNH, in einem lesenswerten Beitrag [4] klar macht, denn sie gelten nur, wenn

- $l \gg d$ ist, die Länge des Drahtes also wesentlich größer als der Drahtdurchmesser ist und
- wenn das Magnetfeld um den Draht nicht durch den zurückfließenden Strom beeinflusst wird, der Draht also von anderen von Strom durchflossenen oder auch nur leitfähigen Teilen weit entfernt ist.

Beide Bedingungen sind in unseren Hochfrequenzschaltungen meist **nicht** erfüllt, so dass man sich auf die Ergebnisse auch nicht verlassen kann, was die Praxis oft genug bestätigt. Knight stellt daher fest: **Die Umgebung des kurzen Leiters muss in die Überlegungen mit einbezogen werden.** Oder anders ausgedrückt: Hin- und Rückweg des Stromes müssen bei der – wie auch immer gearteten – Berechnung berücksichtigt werden.

Sein Vorschlag, den Stromkreis, in dem sich die zu modellierende Zuleitung befindet, als Teil einer mehr oder weniger runden Stromschleife aufzufassen, für die Thompson [5] eine Formel angibt, greift leider auch nur, wenn weitere leitende

Strukturen weit entfernt sind und Amplitude und Phase des Stromes in allen Teilen des Pfades identisch sind. Da das fast nie der Fall ist, hilft nur ein neuer Lösungsansatz, bei dem Hin- und Rückweg des Stromes immer gemeinsam betrachtet werden.

((Kleiner Ausflug in die Leitungstheorie))

Diesen Ansatz erfüllt die Leitungstheorie, die den Transport von Energie in Form einer elektromagnetischen Welle beschreibt. Die Ausbreitung im freien Raum ist jedem Funkamateureur geläufig. Das Verhalten bei der Führung der Welle in oder an einer vorgegebenen leitenden Struktur ist eher unbekannt. Aber das wird sich jetzt ändern.

Man kann nämlich einzelne Leiterstücke einschließlich ihres Rückweges zum Beispiel als kurzes Koaxialkabel, als Zweidrahtleitung oder als eine „halbe Zweidrahtleitung“ (Draht entlang einer leitenden Wand) auffassen. Und für diese Anordnungen gibt es Formeln, mit denen man den jeweiligen Wellenwiderstand berechnen kann. Wenn das Analyseprogramm es zulässt, kann man das Leiterbahnstück sogar direkt als Kabel modellieren. Oder man berechnet aus dem Wellenwiderstand Z über den Induktivitätsbelag die auf das Leiterstück entfallende Induktivität L . Ja man kann auch aus dem Kapazitätsbelag die Parallelkapazität C bestimmen und - wenn nötig - beide Elemente ins Ersatzschaltbild einbauen. Lösungsmöglichkeiten mit verbesserter Genauigkeit gibt es bei diesem Ansatz also viele.

((Praktische Vorgehensweise))

Als erstes stellt sich die Frage, wie aus einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z und einem eventuellen Verkürzungsfaktor $k_v = 1/\sqrt{\epsilon_r}$ der Induktivitäts- und Kapazitätsbelag ermittelt werden kann, der dann – mit der tatsächlichen Drahtlänge multipliziert – die Ersatzinduktivität und/oder Kapazität ergibt. Es gilt für den Wellenwiderstand Z und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (5) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L' * C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (6)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300000 \text{ km/s}$, der relativen Dielektrizitätszahl ϵ_r des Isolators (bei Luft gleich 1) und dem Induktivitäts- und Kapazitätsbelag L' und C' . L' und C' sind dabei die über die Kabellänge verteilten und auf die Längeneinheit bezogenen Werte von L und C .

Aus (5) und (6) erhält man durch Multiplikation bzw. Division die gewünschten Beziehungen

$$L' = \frac{Z * \sqrt{\epsilon_r}}{c} \quad (7) \quad \text{und} \quad C' = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z * c} \quad (8)$$

und daraus mit der **Länge l in Millimeter** die Größengleichungen für L und C

$$L = L' * l = l * \frac{\sqrt{\epsilon_r} * Z}{300} \quad [\text{nH}] \quad (7a) \quad \quad C = C' * l = l * \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z * 0,3} \quad [\text{pF}] \quad (8a)$$

Aber **Achtung**: In beiden Gleichungen (7a) und (8a) ist l immer die tatsächliche **geometrische** Ausdehnung und nicht die elektrisch wirksame Länge.

Für eventuelle weitere Umwandlungen können für den interessierten Leser auch noch folgende Beziehungen von Interesse sein

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 * \epsilon_0} \quad \text{und} \quad Z_0 = 120\pi = c * \mu_0 = \frac{1}{c * \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Falls bei einem Kabel statt des Verkürzungsfaktors oder ϵ_r nur der Kapazitätsbelag in pF/m bekannt ist, berechnet man zunächst den Kapazitätsbelag eines Kabels mit gleichem Z und $\epsilon_r=1$. Das Verhältnis dieses C' im Verhältnis zur Datenblattangabe ergibt den Verkürzungsfaktor k_v , aus dem sich dann auch $\epsilon_r=1/k_v^2$ für die endgültigen Berechnungen ergibt.

Wie kommen wir aber jetzt zu dem wirksamen Wellenwiderstand des zu modellierenden Leiterstückes?

((Wellenwiderstände bekannter Anordnungen))

Funkamateure kennen die Formeln zu Berechnung des Wellenwiderstands eines Koaxialkabels und einer Zweidrahtleitung aus dem Fragenkatalog der Klasse A [6]. Aber wie sieht es mit anderen Formen der Wellenführung aus? Für einige Strukturen finden sich Formeln im Abschnitt 11 des Taschenbuch der Hochfrequenztechnik [7]. Bild 1 zeigt die Originalgrafik aus der ersten Auflage von 1956. Sie zeigt die übliche koaxiale Struktur mit rundem Außenleiter, den quadratische Außenleiter, den runden Innenleiter mit einer einzelnen Fläche als Außenleiter sowie zwischen zwei Flächen in gleichem Abstand und in einer winkligen Struktur mit rechtem Winkel. Zur Bestimmung von Z gibt es im Text zu jeder Struktur eine Näherungsgleichung.

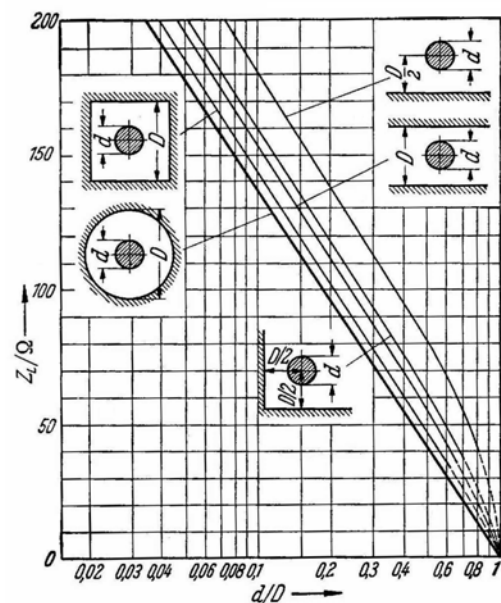
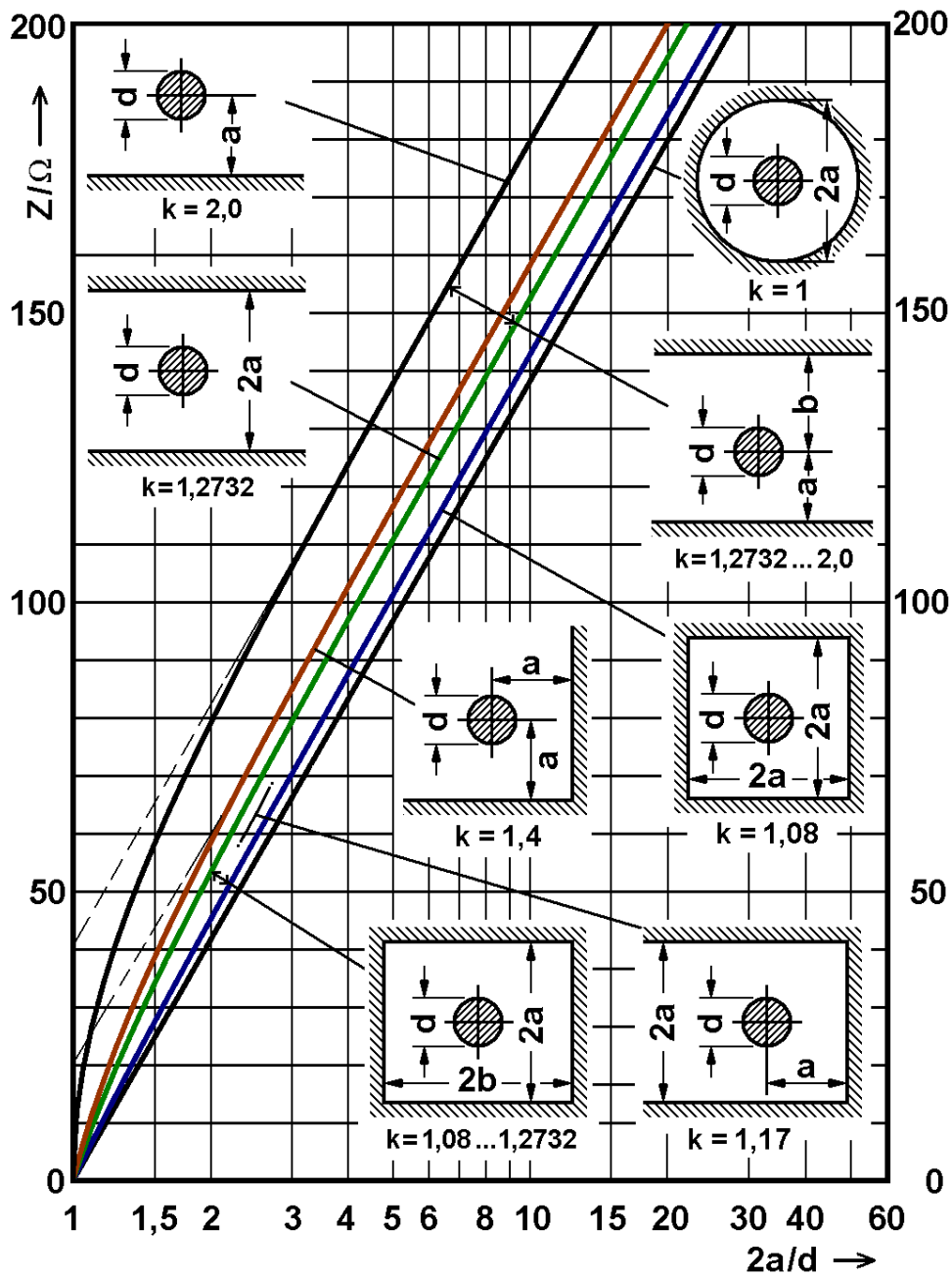


Abb.11.1. Wellenwiderstand von Leitungen mit kreisförmigem Innenleiter und Außenleitern verschiedener Form.

Die angegebenen Formeln gelten allerdings nur, wenn der Abstand des Leiters von der nächstgelegenen leitenden Wand mindestens das 1,5-fache seines Durchmesser beträgt. Schaut man genauer hin, sind diese Näherungsgleichungen alle ähnlich und unterscheiden sich letztlich nur durch einen für die jeweilige Struktur charakteristischen Proportionalitätsfaktor. Um zu einer einheitlichen Darstellung zu kommen, habe ich diesen Faktor k genannt, wobei k zwischen 1 (koaxiale Anordnung) und 2 (Leitung über einer einzigen ebenen Fläche) liegt.

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} * \ln\left(k \frac{2a}{d}\right) \quad (9)$$

Die Anordnungen aus Bild 1 finden sich zusammen mit dem kennzeichnenden k-Wert auch in Bild 2. An Stelle des Parameters D wurde der nächstgelegene Abstand zu den leitenden Flächen a (=D/2) eingeführt und die Grafik statt mit d/D wie in Bild 1 mit dessen Kehrwert, also 2a/d skaliert.



$$Z/\Omega \cong \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(k \frac{2a}{d}\right) \quad (\text{Näherung für } 2a/d > 3) \quad (1)$$

$$Z/\Omega = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(k \frac{a}{d} + \sqrt{\left(k \frac{a}{d}\right)^2 - k + 1}\right) \quad (2)$$

$$Z/\Omega = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \left(\ln\left(\frac{2a}{d}\right) + \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \ln\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{d}\right)^{-2}}\right) \right) \quad (3)$$

$$k = 1,2732 - 0,1932 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{3,5} \quad k = 2 - 0,7268 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{3,5} \quad (4)$$

Bild 2: Wellenwiderstand eines runden Leiters in verschiedenen geometrischen Anordnungen (nach [7]) mit Ergänzungen. Die Näherungsgleichung (1) gilt nur für $2a/d > 3$, während die Formeln (2) und (3) den gesamten Bereich erfassen. Hinweise: Für den Faktor $k=1,27$ in [7] findet sich in [13] der Ausdruck $4/\pi$, was 1,27324 ergibt. Statt $k=1,08$ für den quadratischen Außenleiter findet man gelegentlich auch Werte von 1,078 oder 1,079.

Obwohl man bei der Simulation von kurzen Verbindungsleitungen mit den Konfigurationen aus Bild 1 schon etliche praktische Fälle modellieren kann, sind weitere Anordnungen wünschenswert. So fand ich die U-förmige Außenleiterstruktur in [8], wobei sich aus mehreren Modellrechnungen der Faktor $k=1,17$ ergab.

Zusätzlich habe ich eine Geometrie mit zwei verschieden weit entfernten Flächen aufgenommen, die in der Literatur so nicht zu finden war. Die Anregung den dazu erforderlichen Zusammenhang zwischen a und b und dem dazu gehörigen Formfaktor k in eine Formel zu packen, habe ich aus einer Veröffentlichung zu Asymmetrischen Striplines [9] entnommen. Dort wird zwischen den beiden Grenzwerten mit dem Verhältnis a/b linear interpoliert. Diese Grenzfälle sind hier $k=1,2732$ und $k=2$.

Und weil bei den praktischen Anwendungen auch häufig eine Anordnung des runden Leiters in einer rechteckförmigen leitenden Umgebung vorkommt, habe ich aufbauend auf dieser Praxis eine weitere Interpolation zwischen dem quadratischen Querschnitt ($k=1,08$) und den seitlich nicht begrenzten Flächen ($k=1,2732$) eingeführt.

Für den rechteckförmigen Außenleiter habe ich für drei Verhältnisse von $2a/d$ die Verläufe der Interpolationsfunktion $k(a/b)$ durch Modellrechnungen mit dem Programm **Arbitrary Transmission Line Calculator atlc2** [18] ermittelt. Es zeigte sich, dass der grundsätzliche Verlauf über a/b zwischen $1 \dots 0$ in allen drei Fällen ähnlich ist, aber offenbar auch noch ein Einfluss des Innenleiterdurchmessers vorhanden ist. Um diesen zu berücksichtigen reichten weder die Datenmenge noch die Genauigkeit von atlc2 aus. Die gewählte Funktion kann also nicht exakt sein und wurde so gewählt, dass alle Abhängigkeiten im Mittel gleich gut abgebildet werden. Für den vorgesehenen Zweck der Modellierung kurzer Verbindungsleitungen kann sie als ausreichend genau gelten.

Da die Modellierung für den Fall der seitlich nicht begrenzten Ebenen nicht mit der nötigen Zuverlässigkeit durchführbar war, die Feldverläufe aber sehr ähnlich sind, dürfte die Übertragung des gefundenen funktionellen Zusammenhangs mit anderen Grenzen auf diesen Fall zulässig sein.

Die beiden Formeln für die Bereiche $k=1,08$ bis $1,2732$ und $k=1,2732$ bis $2,0$ lauten

$$k = 1,2732 - 0,1932 * (a/b)^{3,5} \quad (10a) \quad \text{und} \quad k = 2 - 0,7268 * (a/b)^{3,5} \quad (10b)$$

((Entwicklung einer einheitlichen Berechnungsgleichung))

Alle in Bild 2 angegebenen Kurven mit Ausnahme der koaxialen Anordnung ($k=1$) folgen unterhalb von 50 Ohm nicht mehr einer Geraden, wie sie von der Näherungsformel (9) für sämtliche Fälle beschrieben wird, sondern sie biegen unterhalb von $2a/d=3$ in Richtung Null Ohm ab. Dieser Nullpunkt wird unabhängig von k bei $2a/d=1$ erreicht, was ja bedeutet, dass der Innenleiter den Außenleiter berührt. Auch wenn das in der Praxis natürlich nicht vorkommt, ist es wünschenswert, eine Formel zu haben, die den von der Näherungsformel nicht erfassten Bereich für alle Werte von k zuverlässig beschreibt, damit beispielsweise auch eine Verbindung berechnet werden kann, die nahe an einer leitenden Wand verläuft.

Bei der Suche nach dieser „Formel für alle Fälle“ bin ich von der exakten Gleichung ausgegangen, die für die runde Leitung über einer leitenden Fläche (Fall $k=2$) in [7] und [9] angegeben ist. Sie weicht deutlich von der Formel der runden koaxialen Struktur ab und lautet:

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \operatorname{ar} \cosh\left(\frac{2a}{d}\right) \quad (11)$$

Um zu überprüfen, ob diese Formel für $2a/d > 3$ in die Näherungsformel (9) übergeht, formen wir sie mit der Äquivalenz aus [16]

$$\operatorname{ar} \cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (12)$$

um und erhalten zunächst

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln\left[\frac{2a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2a}{d}\right)^2 - 1}\right] \quad (13)$$

Für große Werte von $2a/d$ kann der Summand -1 unter der Wurzel vernachlässigt werden, so dass sich als Näherung

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln\left(2 \frac{2a}{d}\right)$$

oder unter Verwendung des Formfaktors $k = 2$ die Näherung (9) ergibt.

Was liegt also näher, als den Faktor k schon in der exakten Formel (13) einzuführen und statt der Ziffer 1 unter der Wurzel zunächst die Abkürzung p zu verwenden. Es ergibt sich mit $p = 1$

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln\left(k * \frac{a}{d} + \sqrt{\left(k * \frac{a}{d}\right)^2 - p}\right) \quad (14)$$

Setzt man nun in dieser zunächst nur für $k=2$ gültigen Formel $k=1$, erhält man genau die Formel für die Koaxiale Leitung, wobei jetzt allerdings $p = 0$ sein muss. Das bedeutet also, dass Gl. (14) sowohl für $k=1$ als auch für $k=2$ gelten würde, wenn p von k abhängig gemacht wird. Die einfachste Beziehung, die diese Forderung erfüllt ist: $p = k - 1$. Damit ergibt sich

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln\left(k * \frac{a}{d} + \sqrt{\left(k * \frac{a}{d}\right)^2 - k + 1}\right) \quad (15)$$

Sollte diese Formel nicht nur für $k=1$ und $k=2$ gelten, sondern auch für alle anderen k , müssten zwei weitere Bedingungen erfüllt sein:

- für große Werte von $2a/d$ muss sich unabhängig von k die Näherungsgleichung (9) ergeben und
- für $2a/d=1$ muss Z unabhängig von k immer gleich Null werden.

Die erste Bedingung ist erfüllt, wie man leicht feststellen kann, da der Term $-k+1$ bei größeren Werten von $2a/d$ immer vernachlässigbar ist. Dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist, kann nach Einsetzen von $2a/d=1$ gezeigt werden, wenn man die binomische Formel unter der Wurzel bei Beachtung des richtigen Vorzeichens auflöst:

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln \left(\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k + 1} \right) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln \left(\frac{k}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{k}{2}\right)^2} \right) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln(1) = 0$$

Wir haben also mit Gl. (15) eine Formel, die alle Geometrien und alle Abstände umfasst. Um sie von einer weiteren Formel zu unterscheiden, die weiter unten erläutert wird, nenne ich diese Methode im Folgenden „k-Interpolation“.

((Genauigkeit und alternative Lösungen))

Der Vergleich der in Bild 2 mit Formel (15) errechneten Kurven mit den gestrichelten Teilen der Kurven der Originalgrafik (Bild 1) zeigt keine erkennbare Abweichung, was die Gültigkeit der ermittelten Formel zumindest nahe legt.

Zuverlässiger erscheint ein rechnerischer Vergleich, den zwei unterschiedliche Formeln für den runden Innenleiter im quadratischen Außenleiter (k=1,08) ermöglichen. Sie finden sich in zwei Ausgaben desselben Handbuches aus den Jahren 1946 [11] und 1956 [12].

Dabei kann man auf die Idee kommen, dass die Formel von 1946, hier umgeschrieben auf die Nomenklatur dieses Beitrages und mit k=1,078

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln \left(\frac{2a}{d} * \left(1.078 - 0.078 * \left(\frac{2a}{d} \right)^{-2} \right) \right) \quad (16)$$

eine mathematische Umformung von (15) ist, bei der die Wurzel durch die ersten beiden Glieder einer Reihenentwicklung ersetzt wurde. Diese würde lauten:

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln \left(\frac{2a}{d} * \left(k - \frac{k-1}{k} * \left(\frac{2a}{d} \right)^{-2} \right) \right) \quad (17)$$

Beide Gleichungen unterscheiden sich nur insofern, als das k im Nenner des Korrekturgliedes in (16) zu 1 gesetzt ist und der Einfluss dieses Terms daher um 8 % größer ist. Dies bewirkt erfreulicherweise, dass sich für 2a/d=1 der gewünschte Wert Z=0 ergibt, was bei der abgebrochenen Näherung (17) nicht der Fall ist. Wie man leicht überprüfen kann, geht auch (16) für große Werte von 2a/d in die Näherung (9) über. Die Unterschiede zwischen den mit (15) und (16) ermittelten Wellenwiderständen sind verblüffend gering und liegen im ganzen Gültigkeitsbereich unter 0,1 Ohm.

In der vierten Auflage des Handbuches aus dem Jahre 1956 hat man die Gleichung von 1946 durch eine ausgesprochen komplexe Formel (18) ersetzt, deren Struktur eine nähere Betrachtung verdient. Es ist

$$Z = \frac{60 * \ln(\rho) + 6.48 - 2.34A - 0.48B - 0.12C}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (18)$$

mit $\rho = 2a/d$

$$A = (1 + 0.405\rho^{-4}) / (1 - 0.405\rho^{-4})$$

$$B = (1 + 0.163\rho^{-8}) / (1 - 0.163\rho^{-8})$$

$$C = (1 + 0.067\rho^{-12}) / (1 - 0.067\rho^{-12})$$

Die Formel macht sich die Eigenschaft zu Nutze, dass die Wellenwiderstände bei großen Werten von $2a/d$ durch eine Parallelverschiebung gegenüber dem Wellenwiderstand der runden Koaxialstruktur ($k=1$) um $60 \cdot \ln(k)$ darstellbar sind. In Bild 2 ist dies an den parallel verlaufenden Kurven oberhalb von $2a/d=3$ ersichtlich. Die weiteren Glieder der Formel sind offenbar durch Kurvenanpassung entstanden. Sie bestehen aus einer Parallelverschiebung um 6,48 Ohm vermindert um drei Ausdrücke mit höheren Potenzen von $p = 2a/d$ die bewirken, dass Z bei kleinen Werten von p gegen Null geht.

Für große Werte von $2a/d$ entsprechen die Ergebnisse von (18) der Näherung (9) für $k=1,061$, was sehr ungewöhnlich ist, da dadurch alle Werte – auch gegenüber der allgemein anerkannten Näherungsformel - um rund 1 Ohm zu niedrig sind. Bei kleineren $2a/d$ -Werten sind die errechneten Wellenwiderstände gegenüber der k -Interpolation (15) mit $k=1,061$ zwar höher, weichen aber gegenüber den Ergebnissen mit (15) und $k=1,08$ deutlich ab.

Ich frage mich, warum man die Formel von 1946, die doch so gut mit meiner k -Interpolation übereinstimmt, durch etwas ersetzt hat, das zumindest was den Faktor k betrifft, nicht plausibel erscheint. Kann die tabellarische Darstellung des Wellenwiderstandes des ‚Square Coax‘ über dem Verhältnis $2a/d$ von Kevin Schmidt K9CF [14] zur Klärung beitragen? Er errechnet den Wellenwiderstand aus dem elektrischen Feld durch Integration der Laplace-Gleichung. Seine Ergebnisse liegen allerdings ganz erheblich über denen aller anderen Lösungen. Ja, sie stimmen schon fast mit den Lösungen der – in diesem Bereich ungültigen - Näherungsformel für $k=1,08$ überein, deren Werte nur noch 0,1 Ohm höher liegen. Zufrieden konnte ich damit nicht sein. Und so versuchte ich, mit dem bereits erwähnten Programm `atlc2` der Wahrheit näher zu kommen. Es zeigte sich aber, dass das Programm schon die runde Koaxialstruktur nicht genauer als 0,2 Ohm errechnet und dass die ermittelten Lösungen des quadratischen Außenleiters keine gleichmäßige Kurve bildeten.

Zufällig wurden in dieser Zeit in meinem DARC-Ortsverband C01 Zweifachkoppler von $2 \times 50 \Omega$ auf 50Ω benötigt, mit denen man zwei gleiche Antennen zu einer Gruppe zusammenschalten kann. Zur ersten Lösung benutzte DL9MEU einen Bauvorschlag von DK7ZB [xxx], der den Wellenwiderstand mit der Näherungsgleichung (9) bestimmt. Das Ergebnis war für die praktische Anwendung völlig zufriedenstellend, wich aber doch bei der exakten Messung von den erwarteten 50 Ohm nach oben ab. Eine zweite Lösung mit zwei kurzen Leitungen von ca. 50Ω und ca. 25Ω , die mit meiner k -Interpolation berechnet wurden, funktionierte genau so gut. Bei dieser Realisierung lag die Ausgangsimpedanz aber etwas unter 50 Ohm. Das deutet darauf hin, dass die richtigen Impedanzen im Bereich zwischen diesen beiden Formeln liegen. Die Rückwärtssimulation der Schaltungen auf die gemessenen Ergebnisse lieferte mir die jeweils elektrisch wirksamen Impedanzen und Längen. Während letztere erwartungsgemäß passten, lagen die wirksamen Wellenwiderstände tatsächlich zwischen den Vorhersagen der Näherungsformel (9) und den Ergebnissen der k -Interpolation (15), was mich ermunterte, nach einer besser passenden Formel zu suchen, die ich schließlich Z -Interpolation nannte. .

((Alternative Berechnungsgleichung und Vergleich aller Lösungen))

Angeregt durch die Idee der Parallelverschiebung in Formel (18) kam ich auf die Idee, nicht die k -Werte zu interpolieren, sondern zur Interpolation nur die Wellenwiderstände des runden Koaxialleiters ($k=1$) und die des Einzeleleiters gegenüber einer Ebene ($k=2$) sowie die Ergebnisse der Näherungsformel heran zu ziehen. Beide Formeln sind ja exakt, so dass es möglich sein sollte, die anderen Kurven für jeden Wert von $2a/d$ so festzulegen, dass der relative Abstand zwischen

beiden Bezugskurven überall das gleiche Verhältnis aufweist wie bei den Z-Werten für $2a/d \gg 3$.

Damit ergibt sich das interpolierte Z zu

$$Z(k) = 60/\sqrt{\epsilon_r} \cdot \ln(2a/d) + [60/\sqrt{\epsilon_r} \cdot \operatorname{arcosh}(2a/d) - 60/\sqrt{\epsilon_r} \cdot \ln(2a/d)] \cdot \ln(k)/\ln(2)$$

Bei ausschließlicher Verwendung des Logarithmus naturalis wird daraus

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \left[\ln(2a/d) + \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1 - (2a/d)^{-2}}\right) \right] \quad (19)$$

Wie man in der Grafik Bild 3 gut erkennen kann, liefert die Z-Interpolation (19) Ergebnisse, die mit der Wirklichkeit sehr viel besser übereinstimmen. Die Grafik enthält zum übersichtlichen Vergleich alle bisherigen Lösungsansätze. Aber damit die Unterschiede überhaupt sichtbar werden, wird in Bild 3 nur die Differenz der ermittelten Wellenwiderstände zum Z der jeweils zugehörigen runden Koaxialstruktur gezeigt. Das gilt auch für die drei eingezeichneten Messwerte. Der Abszissenbereich oberhalb von $2a/d=3$ wird üblicherweise von der Näherungsformel (9) ganz gut abgedeckt, was an den asymptotischen Näherungen gut erkennbar ist.

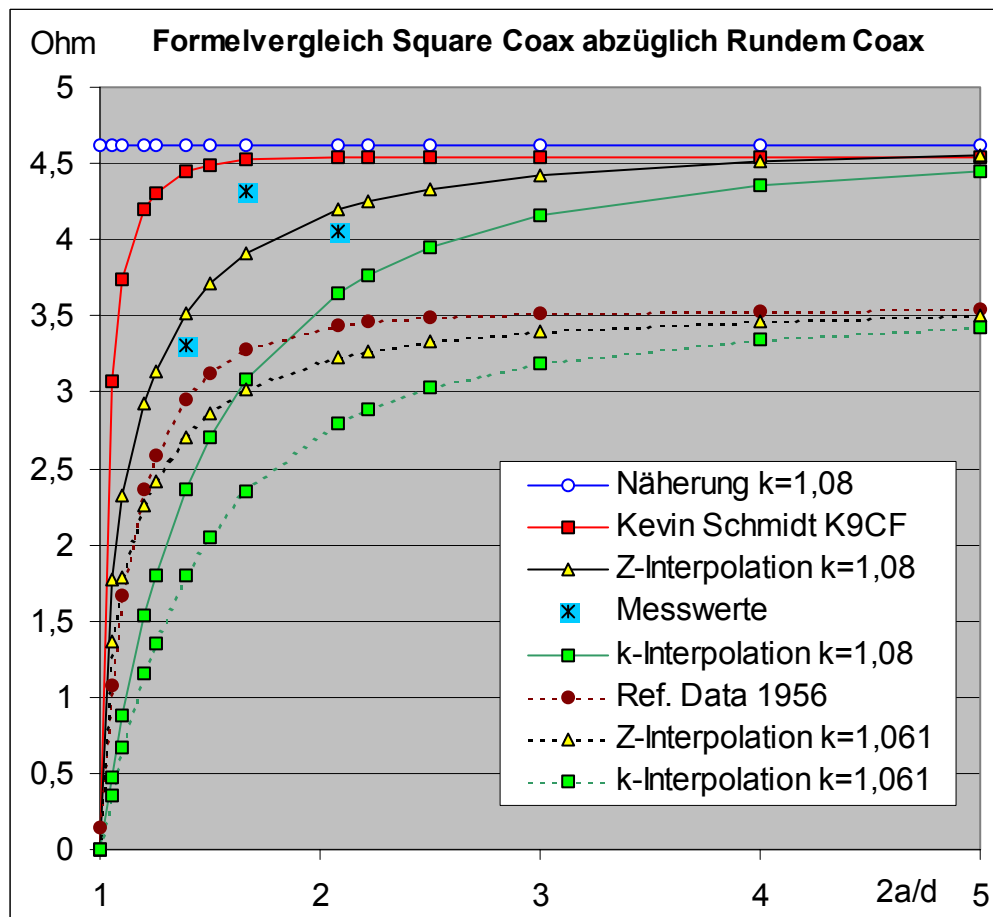


Bild 3: Vergleich verschiedener Lösungsansätze und Messwerte. Dargestellt ist jeweils der Unterschied der Wellenwiderstände gegenüber dem Z der runden Koaxialstruktur mit gleichem Verhältnis der Abmessungen.

Ausgehend von den drei Messwerten (blau unterlegte Kreuze in Bild 3) fällt auf, dass die 3 Lösungen mit $k=1,061$ (gestrichelte Kurven im unteren Bereich) komplett ausscheiden. Die Messwerte liegen mit leichter Streuung zwischen den durchgezogenen Kurven der k -Interpolation (15) (grüne Kurve) und den

Tabellenwerten von K9CF [14] (rote Kurve). Die Z-Interpolation (19) (schwarze Kurve mit gelben Dreiecken) harmoniert am besten mit den Messwerten. Das macht diese Lösung zumindest für den koaxialen Wellenleiter mit quadratischem Außenleiter zur meiner bevorzugten Formel.

((Zu den praktischen Lösungen und Rechnungen ist ein eigener Aufsatz geplant))

((Universelles Rechenprogramm))

Da allgemein bekannte Rechenprogramme wie z. B. [8], [9] und [13] entweder nur einzelne Konfigurationen berücksichtigen oder – außer bei der Zweidrahtleitung oder der üblichen runden Koaxialstruktur - nur mit der Näherungsformel arbeiten, habe ich ein Programm [17] geschrieben, das Berechnungen stark vereinfacht. Es ist auch von der ((Downloadseite des FUNKAMATEUR)) herunter ladbar. Als Sprache kommt HTML mit JavaScript zum Einsatz. Damit ist das Programm auf jeder Plattform vom PC bis zum Smartphone lauffähig, denn HTML-Browser mit JavaScript sind ja überall implementiert. Einer unkomplizierten Anwendung des Programms steht daher nichts im Wege. Bild 4 zeigt einen Screenshot.

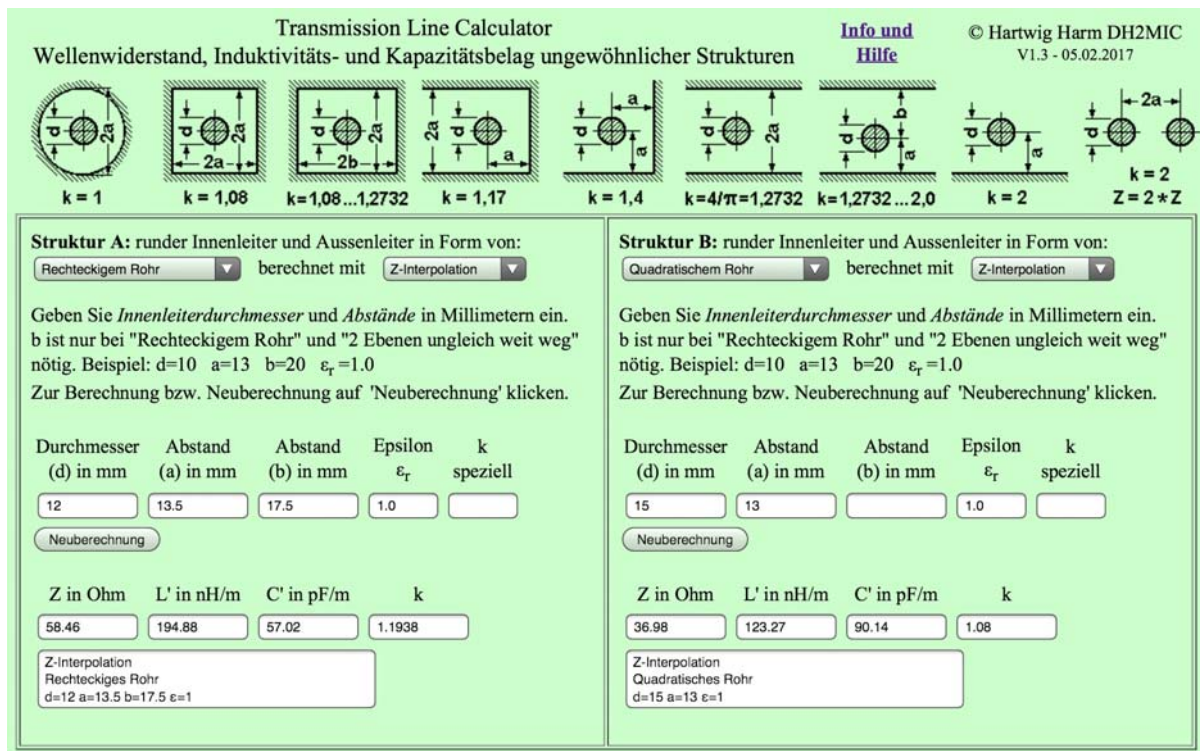


Bild 4 Screenshot des Programmes tlc.htm. Im linken Rechenblatt ist eine Aufgabe aus den folgenden Beispielen und rechts die Berechnung einer koaxialen Transformationsleitung mit quadratischem Außenleiter zur $\lambda/2$ -Transformation von 25 auf 50 Ohm gezeigt.

Nach Auswahl der gewünschten Struktur und der Interpolationsformel folgt die Eingabe von Durchmesser d und Abstand a des Mittelpunktes von der nächstgelegenen Wand und bei den unsymmetrischen Konstellationen auch noch der zweite Abstand b . Angezeigt werden der Wellenwiderstand Z in Ohm sowie Induktivitäts- und Kapazitätsbelag L' in nH/m bzw. C' in pF/m und der aktuelle Wert von k . Im Bemerkungsfeld finden sich die Eingabedaten wieder. Damit wird Irritationen vorgebeugt, die auftreten können, wenn schon neue Eingabedaten eingegeben, der Neuberechnungs-Button aber noch nicht angeklickt wurde. Damit Vergleiche zwischen verschiedenen Lösungen erleichtert werden, ist das

Rechenblatt doppelt vorhanden. Die Berechnung der Daten einer Zweidrahtleitung erfolgt übrigens intern über den Einzelleiter gegen eine Wand ($k=2$), indem Z einfach verdoppelt wird. Auch wenn in der Praxis Luft als Dielektrikum vorherrscht, habe ich die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r mit ins Rechenblatt aufgenommen.

Wer beim quadratischen Außenleiter eher den Formeln aus [11] oder [12] vertraut, bekommt auch diese Möglichkeit angeboten. Die Tabelle von Kevin Schmidt ist dagegen nicht eingebaut. Geplant ist, das Programm zweisprachig zu gestalten.

Anwendungsbeispiele findet der interessierte Leser in zwei Aufsätzen über VHF- und UHF-Filterschaltungen, die in den folgenden FUNKAMATEUR-Ausgaben erscheinen werden. Soviel sei aber jetzt schon verraten: Die Genauigkeit der Berechnungen übertrifft alle Erwartungen.

Hartwig Harm, DH2MIC

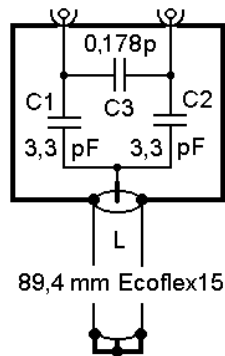
Stand 1.3.2017

Dieser Teil wurde in den Aufsatz Bandpass für 70 cm mit 2m-Bandsperre verlagert.

Theorie: 89,4mm 0,178p; **9nH:** 52,7mm 0,215p

Z-Interpolation: 71,9mm 0,194p, **ohne 0,72p:** 79,0mm. 0,208p;

Ohne 4,12n: 81,9mm 0,170p; **ohne beide:** 87,6mm 0,182p



Mit diesem Rüstzeug können wir jetzt viele Verbindungen modellieren und aus dem ermittelten Z den Induktivitäts- und den Kapazitätsbelag ermitteln. Ob dann nur das L, nur das C oder die Kombination aus beiden in der Ersatzschaltung auftauchen müssen, hängt vom Einzelfall ab. Die folgenden Beispiele sind Aufgabenstellungen aus dem Aufsatz ((auf Seite ### in diesem Heft)), dem die Schaltung in Bild 5 zu Grunde liegt und deren Realisierung in Bild 6 zu sehen ist.

Bild 5: Notchfilter für 432 MHz

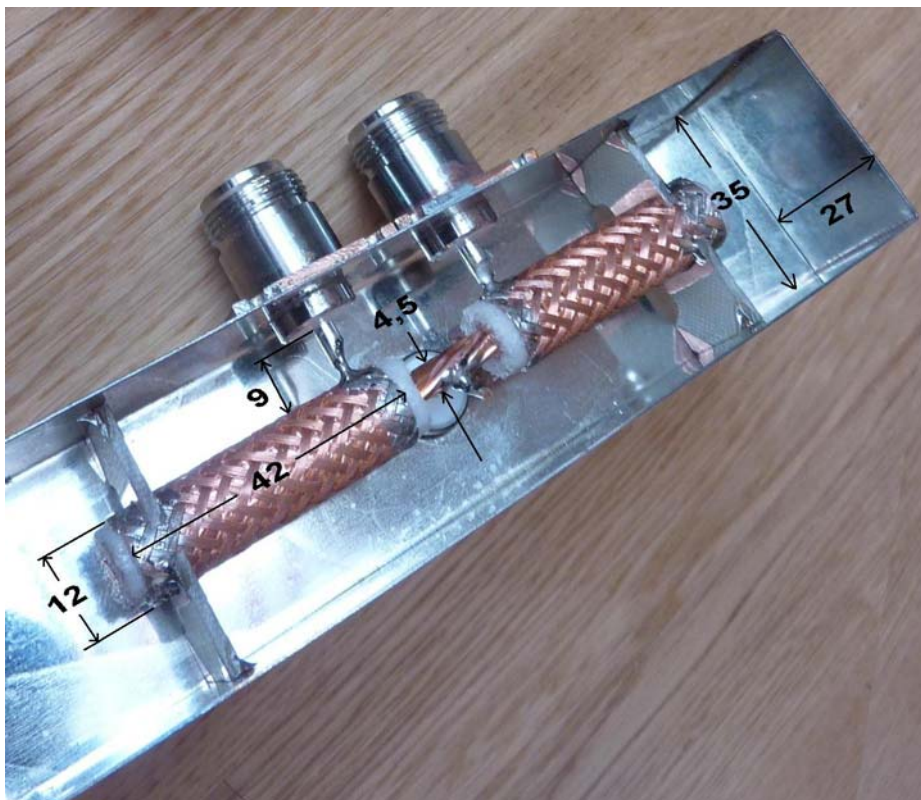


Bild 6: Notchfilter in einer ersten Realisierung

Für die Ersatzschaltung in Bild 7 ermitteln wir zunächst alle passenden Modelle und ihre Parameter. Diese sind zusammen mit den Lösungen, die mit dem Programm tlc.htm errechnet wurden in Tabelle 1. zusammengestellt. Wer möchte kann die Berechnung auch mit Hilfe der Formeln (7a), (7b), (10a), (10b) und (19) nachvollziehen.

Beginnen wir mit der Verbindung von der Eingangs- bzw. Ausgangsbuchse zu den Außenbelägen der Rohrcondensatoren C1 und C2 aus 42mm ECOFLEX 15. Sie sind 9 mm lang. Der Innenleiter der Buchse hat 4 mm Durchmesser und ist 6 mm lang. Der Anschlussdraht ist nur 2,5 mm dick und 3 mm lang. Wegen der Lötstellen, die eine Verdickung bewirken, nehmen wir für die gesamte Länge einen Durchmesser von $d=4$ mm an. Der Abstand zum Boden und zum Deckel beträgt jeweils $a=13,5$ mm. Der Faktor k des passenden Modells ist 1,2732 bei $\epsilon_r = 1$.

Als nächstes kommt der Rohrcondensator aus ECOFLEX 15 an die Reihe. Falls das Analyseprogramm ein insgesamt „hoch“ liegendes Kabel berücksichtigen kann, sind wir mit $Z=50$, $\epsilon_r = 1,35$, $k_v = 1/\sqrt{\epsilon_r} = 0,86$ und $l = 42$ mm schon fertig. Für RFsim99 [15] brauchen wir aber die Ersatzschaltung nach (7a) und (8a). Bei 70 cm „verfälscht“ das Serien-L den wirksamen Kapazitätswert bereits um 6,5 %, wie man der vergleichenden Analyse des Blindleitwertes eines 42 mm langen Kabels mit dem eines Kondensators von 3,26 pF entnehmen kann. Die Ersatzschaltung aus zwei Kondensatoren von je 1,63 pF und dazwischen liegendem L bildet dagegen die Realität schon mit nur noch 1,4 % Abweichung recht genau nach.

Der Rohrcondensatoraußenbelag hat aber auch noch eine Kapazität gegen das Gehäuse. Dieser Kondensator kommt in Bild 5 gar nicht vor, muss aber in der Simulation natürlich auftauchen und lässt sich als runder Leiter in rechteckigem Querschnitt modellieren. Der Innenleiterdurchmesser ist $d = 12$ mm und die Außenwandabstände betragen 13,5 mm (Boden und Deckel) bzw. 17,5 mm (Seitenwände). Aus (10a) errechnet man $k=1,1938$ und kann jetzt das Modell mit rechteckigem Außenleiter anwenden.

In diesem Fall wird das C durch das Längs-L kaum verfälscht, so dass es vernachlässigt werden kann. Hinzu kommen aber die schon berechnete Kapazität der Zuleitung von 0,23 pF und die Zusatzkapazität durch die Stützen aus Leiterplattenmaterial, die mit 0,1 pF eingehen. Macht zusammen 2,72 pF.

Im Zentrum der Schaltung sind noch die drei Leitungen zum zentralen Verbindungspunkt zu berücksichtigen. Die Verbindungen von den Eingangs- und Ausgangskondensatoren haben nach Datenblatt ECOFLEX 15 einen Durchmesser von 4,5 mm und sind effektiv (ohne den zentralen Verbindungsknoten) je 9 mm lang. Der Abstand zu Deckel und Boden beträgt wieder 13,5 mm und die Seitenwände sind 17,5 mm entfernt, so dass das gleiche Modell wie vorher mit $k=1,1938$ zum Einsatz kommt.

Der Innenleiter des Stub ist auch 4,5 mm dick, 9 mm lang und 17,5 mm von den Seitenwänden entfernt. Die Stirnflächen des Gehäuses sind allerdings so weit weg, dass das Modell mit $k=1,2732$ zum Einsatz kommt.

Ob diese drei kurzen Verbindungen nur als Induktivität bei Vernachlässigung der Kapazität oder als kurze Leitung modelliert werden, hängt vom Einzelfall ab. Hier zeigte sich, dass die drei winzigen Kapazitäten gemeinsam sehr wohl einen Einfluss haben. Immerhin verschieben die 0,72 pF die 433-MHz-Resonanzfrequenz um rund 20 MHz oder würden einen um 7 mm längeren Stub vorhersagen.

d/mm	a/mm	b/mm	k	l/mm	ϵ_r	Z	L'/nH/m	C'/pF/m	L/nH	C/pF
4	13,5	-	1,2732	9	1	129,0	430	25,9	3,87	0,23
				42	1,352	50			8,14	3,26
12	13,5	17,5	1,1938	42	1	58,5	195	57,0	(8,18)	2,39
4,5	13,5	17,5	1,1938	9	1	118,0	393	28,2	3,54	0,25
4,5	17,5	-	1,2732	9	1	137,5	458	24,3	4,12	0,22

Tabelle 1: Zusammenstellung der Werte für das Ersatzschaltbild

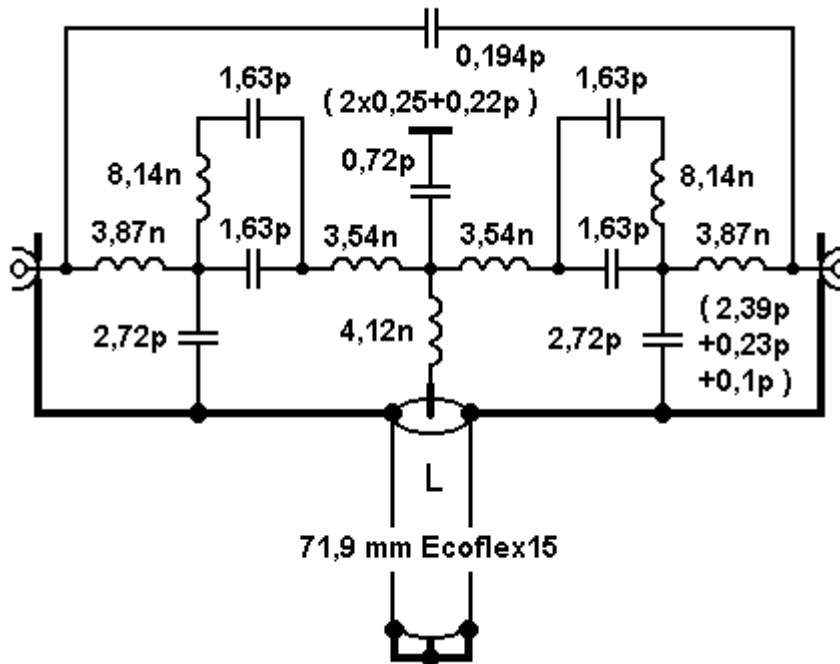


Bild 7: Ersatzschaltbild der kleinen Schaltung aus Bild 4 nach der Optimierung des Überbrückungs-C und der Stublänge

Die auf Grund dieser Daten zu simulierende Schaltung zeigt Bild 6. Die durch Simulation gefundene Länge des kurzgeschlossenen Kabels stimmt auf den Millimeter genau mit der Praxis überein. Die Abweichung der Länge des Stub wird insbesondere durch das Parallel-C von 0,72pF und das Serien-L von 4,12nH verursacht, da beide elektrisch verlängernd wirken. Bei Annahme der landläufig üblichen 1nH/mm wäre die berechnete Länge dagegen mit 52,7 mm um 20 mm zu kurz und von der Realität weit entfernt.

Man sieht also, dass der Ansatz über die Leitungstheorie eine einfache, übersichtliche und zuverlässige Modellierung der unvermeidlichen Zuleitungen ermöglicht. Und dass es oft nicht nur auf die Induktivitäten ankommt, sondern dass auch die Kapazitäten eine große Rolle spielen können. Ein Vorteil den nur die Simulation mit der Leitungstheorie bieten kann. Probieren Sie es aus, lieber Leser. Sie werden überzeugt sein.

((Drei weitere Beispiele sind in einem geplanten Beitrag von DL9MEU über Zweifach-Koppler enthalten, aber im Ergebnis schon bei der Ermittlung der drei Messwerte vorweg genommen.))

Hartwig Harm, DH2MIC

((fehlt noch Hinweis auf Versuche von Peter Tonak DL3JIN, FUNKAMATEUR Heft 9/2016 S. 858 ff und Berechnung der Eigenschaften seines Kopplers mit meinen Formeln einschließlich des daraus resultierenden SWR, was den erwarteten Gewinn von 3dB wohl zunichte gemacht hat, wie ich vermute. Das kann aber vielleicht sogar besser in dem geplanten Beitrag von DL9MEU erfolgen, der sich ja mit der Thematik von Kopplern befasst.))